ΟΡΙΣΜΟΣ Frieze Groups$^{(F)}$ είναι μία ομάδα ισομετριών που διατηρούν σταθερή ευθεία$^{(c)}$ και οι μεταφορές της να είναι άπειρη κυκλική ομάδα

1) Αν η F περιέχει ημιστροφές διαλέγουμε A το κέντρο κάποιας από αυτές.
2) Αν η F δεν περιέχει ημιστροφές αλλά ανακλάσεις ως προς ευθείες κάθετες στη (c), τότε A θα είναι το σημείο τομής της c με κάποιον άξονα ανάκλασης
3) Διαφορετικά διαλέγουμε ως A το τυχαίο σημείο της c

$A_i = \tau^i(A)$

$\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A) \Rightarrow$ "κάθε μεταφορά της F στέλνει το A_i σε κάποιο A_j".

$M = \frac{AA_1}{2}$, $M_i = \tau^i(M)$

1) Έτσι, η $F_1 = \langle \tau \rangle$ είναι Frieze Group.
2) Έστω τώρα $\rho_A \in F$ τότε $\rho_M = \underset{\in F}{\tau} \circ \underset{\in F}{\rho_A} \in F$
Έτσι λοιπόν $\forall i: \rho_{A_i} \in F$ και $\rho_{M_i} \in F$

3) Έστω ρ_k ημιστροφή στην F
$\underbrace{(\rho_k \circ \rho_A)}_{= \rho_k(\rho_A(A)) = \rho_k(A)}(A) = A_n \Rightarrow \rho_k(A) = A_n \Rightarrow k = \frac{AA_n}{2}$

4) $F_2 = \langle \tau, \rho_A \rangle$
$\tau \circ \rho_A = \rho_A \circ \tau^{-1}$
το στοιχείο της F_2 είναι μορφής $\rho_A \circ \tau^i$
5) Έστω $\alpha_\ell \in F$ θα πρέπει $\ell = c$ ή $\ell \perp c$
$F_1^1 = \langle \tau, \alpha_\ell \rangle$. Τα στοιχεία της F_1^1 είναι της μορφής $\alpha_\ell^j \circ \tau^i$ και αβελιανή ($\tau \circ \alpha_\ell = \alpha_\ell \circ \tau$)

6) $F_2^1 = \langle \tau, \rho_A, \alpha_\ell \rangle$. Τα στοιχεία της F_2^1 είναι μορφής $\alpha_\ell^k \circ \rho_A^j \circ \tau^i$, Αβελιανή $\tau \circ \rho_A = \rho_A \circ \tau$ & $\rho_A \circ \alpha_\ell = \alpha_\ell \circ \rho_A$

7) Εστω $\alpha_\ell \in F$ με $\ell \perp C$
A το σημειο τομης της ℓ με τη C
$\underbrace{\tau^{2i} \circ q_\rho}$ $\in F$
Ειναι ανακλαση ως προς αξονα καθετο στη C στο A_i
$\tau^{2i+1} \circ \alpha_\rho$ ... στο M_i.

8) Εστω $\alpha_\varepsilon \in F$ τοτε $\varepsilon \neq c$
αν $\varepsilon = c$ τοτε $\alpha_\varepsilon \circ q_\ell$ θα ήταν ημιστροφή
Αρα $\varepsilon \perp C$ $\alpha_\varepsilon \circ q_\ell$ ειναι μεταφορα στο A_i
$(q_\varepsilon \circ \alpha_\ell)(A) = A_u \Longrightarrow \alpha_\varepsilon(A) = A_n$
$= \alpha_\varepsilon(\alpha_\ell(A)) =$
$= \alpha_\varepsilon(A)$

9) $F_1^2 = \langle \tau, q_\ell \rangle$
οπου $\tau \circ q_\ell = \alpha_\ell \circ \tau^{-1}$
Αρα, τα στοιχεια της F_1^2 ειναι της μορφης
$\alpha_\ell^j \circ \tau^i$

10) Εστω οτι η F περιέχει ημιστροφή και
ανακλαση ως προς ευθεια q
Αν $q = c$ ή $q \perp C$ στο A_i ή το M_i τοτε
ειμαστε στην περιπτωση (9).

11) Εστω οτι το σημειο τομης της q με τη c
ειναι διαφορετικο των A_i και M_i

12) Αν A σημειο συμμετριας για ένα συνολο σημειων
και α_q ανακλαση τοτε $\alpha_q(A)$ ειναι σημειο συμμε-
τριας

Τοτε απο τα (11) και (12)
Το $\alpha_q(A)$ είναι το κέντρο κάποιας ημιστροφής της F
$\Rightarrow \alpha_q(A) = A_i$ ή M_i για καποιο $i \Rightarrow$ η q είναι μια
μεσοκαθετος καποιας $A_i M_i$. Αρα θα περιέχει την
ανακλαση με αξονα τη μεσοκαθετο του AM

	σημείο συμμετρίας	άξονας συμμετρίας	η C είναι άξον. συμμετ
$F_1 = \langle e \rangle$	✗	✗	✗
$F_1^1 = \langle \tau, \alpha_i \rangle$	✗	✓	✓
$F_1^2 = \langle \tau, \alpha_e \rangle$	✗	✓	✗
$F_1^3 = \langle \gamma \rangle$	✗	✗	✗
$F_2 = \langle \tau, \rho_A \rangle$	✓	✗	✗
$F_2^1 = \langle \tau, \rho_A, \alpha_i \rangle$	✓	✓	✓
$F_2^2 = \langle \tau, \rho_A, \alpha_\mu \rangle$	✓	✓	✗

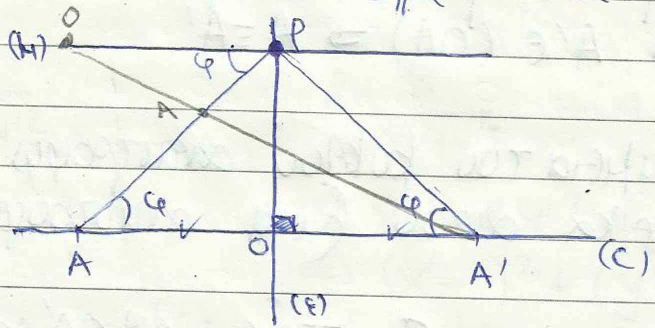
F_1 : F F F F ... F_2 : S S S S ... F_1^3 : OWOMOWOM

F_1^1 : D D D D ... F_2^1 : I I I ...

F_1^2 : A A A A ... F_2^2 : MWMW ...

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ.

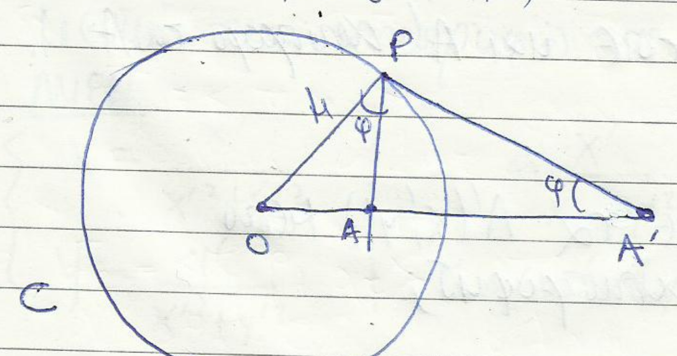
Έστω ο γεωμετρικός μετασχηματισμός ανάκλασης ως προς ευθεία (ε) και έστω $P \in (\varepsilon)$ και $(\mu) \parallel (c)$ με $P \in (\mu)$



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{P\hat{A}O}$ και $\overset{\triangle}{P\hat{A'}O}$ ίσα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P\hat{A}O = P\hat{A'}O = \varphi$

Και προφανώς $A\hat{P}_{\mu} = \varphi$ (ως εντός εναλλάξ των μ, c που τέμνουν AP)



Ορίζουμε το A' ως αντίστροφο του A μέσω του κύκλου αντιστροφής c(O, μ) για να είναι καλά ορισμένο πρέπει το A' να μην εξαρτάται από την επιλογή του P.

Επίσης τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{POA}$, $\overset{\triangle}{POA'}$ είναι όμοια
(Απο: $\hat{O}$ κοινή, $O\hat{P}A = \varphi = O\hat{A'}P$) τότε
$\frac{OA'}{OP} = \frac{OP}{OA} \Rightarrow \boxed{OA \cdot OA' = OP^2 = \mu^2}$

Ορισμος (Αντιστροφή)
Εστω κύκλος C κεντρου O και ακτινας ρ και έστω A σημείο ε/ω $A \neq O$. Εαν $A' \in (OA)$ τ/ω $OA \cdot OA' = \rho^2$ τότε το A' καλείται αντίστροφο του A, ως προς τον κύκλο αντιστροφής C. Το σημείο O καλείται κέντρο της αντιστροφής και το ρ η ακτίνα αυτής. (το O εξ ρ ίσαι γενικό)

Παρατηρήσεις:

① Τα σημεία (στην περιφέρεια) του κύκλου αντιστροφής απεικονίζονται στον εαυτό τους
Απόδ
$OA \cdot OA' = \rho^2 \Longrightarrow \rho \cdot OA' = \rho^2 \Rightarrow OA' = \rho \Rightarrow A' \in C$
και καθώς το $A' \in (OA) \Rightarrow A \equiv A'$

② Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου αντιστροφής $\mapsto$
$\mapsto$ σε εξωτερικά αυτού (και αντίστροφα).
Απόδ
Εστω A εσωτερικό του C τότε $OA \cdot OA' = \rho^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA' = \frac{\rho^2}{OA} > \frac{\rho^2}{\rho} = \rho \Rightarrow A'$ εξωτερικό του C
και όμοια αν A εξωτερικό του C

③ Αν A αντίστροφο του A' τότε και A' αντίστροφο του A

Ερώτημα:
Πως συνδέονται τα $A(x,y)$ με τα $A'(x',y')$ μέσω του μετασχηματισμού της αντιστροφής;

Αν C κύκλος αντιστροφής:

- κέντρου το $(0,0)$ και ακτίνας ρ τότε τα

$$(x',y') = \left(\frac{\rho^2 x}{x^2+y^2}, \frac{\rho^2 y}{x^2+y^2}\right).$$

και ισχύει η συμμετρία στους τύπους
Δηλαδή:

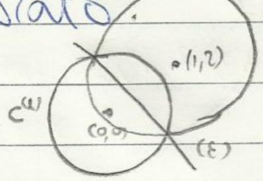
$$(x,y) = \left(\frac{\rho^2 x'}{x'^2+y'^2}, \frac{\rho^2 y'}{x'^2+y'^2}\right)$$

- κέντρου το $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ και ακτίνας ρ τότε τα:

$$(x',y') = \left(\frac{\rho^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + x_0, \frac{\rho^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + y_0\right)$$

Παράδειγμα (Πού απεικονίζονται οι ευθείες μέσω του μετασχηματισμού)
Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $2x+4y=1$ μέσω της αντιστροφής με κύκλο αντιστροφής το μοναδιαίο.

ΛΥΣΗ



Έστω $P(x,y) \in (\varepsilon)$ τότε

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2} \end{cases} \Rightarrow 2\frac{x'}{x'^2+y'^2} + 4\frac{y'}{x'^2+y'^2} = 1 \Rightarrow$$

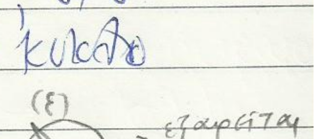
$$\Rightarrow x'^2 - 2x'^2 + y'^2 - 4y'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 5 \leftarrow C^2$$

Άρα, μετασχηματίζεται σε κύκλο κέντρου $(1,2)$ και ακτίνας 5
Παρατηρούμε ότι το $O(0,0) \in C^{(2)}$, άρα το εξαιρούμε

Παράδειγμα
Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $\alpha x + \beta y = 0$, $\beta \neq 0$ μέσω της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο

ΛΥΣΗ



$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha\frac{x'}{x'^2+y'^2} + \beta\frac{y'}{x'^2+y'^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha x' + \beta y' = 0 \Rightarrow \text{η ίδια ευθεία}$$